数理解析研究所講究録
647 巻 1988 年 125-132

H^∞ functional calculus

姫路工業大学　八木厚志　(Atsushi Yagi)

Aを、Banach 空間Xに作用する一つのω型($0 \leqslant \omega < \pi$)線型作用素とする。定義域$\mathcal{D}(A)$はXで稠密、有界な逆A^{-1}が存在すると仮定する。Aのスペクトル集合$\sigma(A)$を含むある角領域で正則有界な関数fに対して、Xの有界作用素$f(A)$が定義できるかどうかについて調べたい。

$0 < \mu \leqslant \pi$に対して、S_μは角領域

$$S_\mu = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\arg \lambda| < \mu\}$$

を表す。$H^\infty(S_\mu)$は、S_μ上で正則有界な関数が作るBanach algebra、$f \in H^\infty(S_\mu)$に対し$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\lambda)|;\lambda \in S_\mu\}$とする。Aはω型であることより、$\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$である。$\omega < \mu \leqslant \pi$に対して考える。$H^\infty(S_\mu)$から$\mathcal{L}(X)$(Xに作用する有界作用素が作るBanach algebra)へのalgebraとしての準同型写像

$$m : H^\infty(S_\mu) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

で、以下の2つの条件：

i) もし f が、ある Γ について

$$\int_\Gamma |f(\lambda)| \, \|(\lambda - A)^{-1}\| \, |d\lambda| < \infty$$

であるならば、$m(f)$ は

$$m(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda$$

と一致する。ここで、Γ は S_μ に含まれ $\sigma(A)$ を囲むような積分路を表す。

ii) m は連続である。即ち、

$$\|m(f)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \|f\|_\infty \qquad f \in H^\infty(S_\mu)。$$

をみたすものが存在するとき、この m のことを、A の S_μ 上における H^∞ *functional calculus* と呼ぶ。以後、f.c. と略記する。上の条件 i) より、このような f.c. は存在すれば、必らず一意的に定まってしまう。その意味で、この $m(f)$ のことを $f(A)$ とも書き表すことは自然なことである。

1．X が Hilbert 空間の場合。

X を Hilbert 空間、A を X の ω 型作用素とする。Hilbert 空間では、f.c. の存在と、様々な条件が同値であることが示される。

定理 A　次の条件は、すべて同値である。

(I) ある $\mu > \omega$ に対して $H^\infty(S_\mu)$ f.c. が存在する。

(Ⅱ) $A^{iy} \in \mathcal{L}(X)$, $-\infty < y < \infty$ かつ $\sup_{-1<y<1} \|A^{iy}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$。

(Ⅲ) ある $0 < \alpha, \beta < 1$ について

$$[\mathcal{D}(A), X]_{1-\alpha} \supset \mathcal{D}(A^{\alpha})$$

$$[\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\beta} \supset \mathcal{D}(A^{*\beta})$$

ただし、$[Y, X]_{1-\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ は Y と X の補間空間（複素の意味の）である。

(Ⅳ) ある $0 < \alpha, \beta < 1$ について

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^{\alpha} A^{1-\alpha}(\lambda + A)^{-1} f\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leqq M_\alpha \|f\| , \quad f \in X$$

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^{\beta} A^{*\,1-\beta}(\lambda + A^*)^{-1} g\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leqq M_\beta^* \|g\| , \quad g \in X。$$

証明の要点。(Ⅰ) ⇒ (Ⅱ) $-\infty < y < \infty$ について $z^{iy} \in H^\infty(S_\mu)$ 、$\|z^{iy}\|_{H^\infty(S_\mu)} \leqq e^{\mu|y|}$ より明らか。(Ⅱ) ⇒ (Ⅲ) A^{iy} は y について強連続群となる。以下、Heinz - 加藤の不等式と同様な議論を行なえばよい。(Ⅲ) ⇒ (Ⅳ) Hilbert 空間では、複素補間と実補間が同等であるという事実が、証明のポイントになる。(Ⅳ) ⇒ (Ⅰ) $\varphi \in H^\infty(S_\mu)$ とする。形式的計算であるが

$$(\varphi(A) f, g) = (\varphi(A) A^{-(\alpha+\beta)} f , A^{*(\alpha+\beta)} g)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\lambda)\lambda^{-(\alpha+\beta)} ((\lambda - A)^{-1} f,\ A^{*(\alpha+\beta)} g)\, d\lambda$$

ここで部分積分して

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Phi(\lambda) ((\lambda - A)^{-2} f,\ A^{*(\alpha+\beta)} g)\, d\lambda$$

$\Phi(\lambda)$ は $\varphi(\lambda)\lambda^{-(\alpha+\beta)}$ の原始関数である。さらに、Γ を負の実軸に近づけると結局

$$|(\varphi(A)f,\ g)| \leq C \int_0^\infty \lambda^{1-(\alpha+\beta)} |(A^\alpha(\lambda+A)^{-1}f,\ A^{*\beta}(\lambda+A^*)^{-1}g)| d\lambda$$

$$\leq C \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \|A^\alpha(\lambda+A)^{-1}f\|\, \lambda^{1-\beta} \|A^{*\beta}(\lambda+A^*)^{-1}g\| \frac{d\lambda}{\lambda} \text{。}$$

詳しい証明は、文献 [1] 及び [3] を参照。

さらに、上の結果は次のように強められる。

定理 B　定理 A の条件がみたされれば、次の各条件が成立する。

(I)′ 任意の $\mu > \omega$ に対して、$H^\infty(S_\mu)$ f.c. が存在する。

(II)′ 任意の $\mu > \omega$ に対して

$$\|A^{iy}\| \leq C_\mu e^{\mu|y|} \text{。}$$

(III)′ すべての $0 < \theta < 1$ について

$$[\mathcal{D}(A),\ X]_{1-\theta} = \mathcal{D}(A^\theta)$$

$$[\mathcal{D}(A^*),\ X]_{1-\theta} = \mathcal{D}(A^{*\theta}) \text{。}$$

(IV)′ すべての $0 < \theta < 1$ について

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^\theta A^{1-\theta}(\lambda+A)^{-1}f\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leq M_\theta \|f\|,\quad f \in X$$

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^\theta A^{*1-\theta}(\lambda+A^*)^{-1}g\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leq M_\theta^* \|g\|, \quad g \in X 。$$

実際に上の f.c. を含む条件 (I) ～ (IV) をみたす作用素の例として、次の様な、L^2 空間における偏微分作用素がある。

例 1　Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域として、Ω における楕円型微分作用素

$$A(x;D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad x \in \Omega$$

と、$\partial\Omega$ 上の境界作用素

$$B_j(x;D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta \qquad x \in \partial\Omega$$

を考える。この微分作用素、境界作用素の $L^2(\Omega)$ における実現を A と表し、A は ω 型であるとする。係数 a_α, $b_{j\beta}$ が十分滑めらかならば、A は条件

$$[\mathcal{D}(A), L^2(\Omega)]_{1-\theta} = [\mathcal{D}(A^*), L^2(\Omega)]_{1-\theta} \quad , 0 < \theta < 1/4m$$

をみたし、一般に上の条件をみたす作用素は (I) ～ (IV) をみたす。([1] を参照)

係数がもう少し滑らかでない場合の例として、

例 2　A は、2 階の楕円型微分作用素

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j \qquad x \in \Omega$$

の、$\partial\Omega$ 上の Dirichlet 境界条件の下での L^2 実現とする。係数

a_{ij} がC^1級ならば、Aは極大単調作用素となり、極大単調作用素は(I)〜(IV)をみたす。

上の作用素で、a_{ij} の滑らかさがさらに悪くなった場合、例えば、a_{ij} が Hölder 連続ならばどうなるかという問題が残っている。空間の次元が1の場合には、次のような例がある。

例3　$\mathbb{R}^1$上で微分作用素

$$a(x)D^2 \qquad -\infty < x < \infty$$

を考え、Aをこの作用素の$L^2(\mathbb{R}^1)$実現とする。$M \geqq a(x) \geqq \delta > 0$ かつ $a \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$ とすると、Aは(I)〜(IV)をみたす作用素となる。これの証明については、[3]を参照。

2. XがBanach空間の場合。

Banach空間では、定理Aはそのままの形では成立しない。実際、条件(II)はみたすが、条件(I)のf.c.が存在しないような例がある。また、条件(IV)に現われた2乗積分の評価式も、一般に、Banach空間では(たとえL^p $(p \neq 2)$空間であっても)期待できない。

そこで、ここでは、XをL^p $(1<p<\infty)$空間に限定し、さらに、Littlewood - Paleyの理論に従って、いわゆる次のようなg - functionを考えることにする。Aを$L^p(\Sigma)$のω型作

用素とする。$0<\theta<1$, $\mu>\omega$ に対し

$$g_{\theta,\mu}(\varphi)(x)=\{\int_{\Gamma_\mu}|\lambda^\theta A^{1-\theta}(\lambda-A)^{-1}\varphi(x)|^2\left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right|\}^{1/2},$$

$$x\in\Sigma\ ,\ \varphi\in L^p(\Sigma)$$

$$g^*_{\theta,\mu}(\psi)(x)=\{\int_{\Gamma_\mu}|\lambda^\theta A^{*\,1-\theta}(\lambda-A^*)^{-1}\psi(x)|^2\left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right|\}^{1/2},$$

$$x\in\Sigma\ ,\ \psi\in L^{p'}(\Sigma)$$

と定義する。ここで、Γ_μ は $\infty e^{-i\mu}$ から原点、原点から $\infty e^{i\mu}$ に向う２つの半直線からなる積分路を表す。また、$p'=p/(p-1)$ である。このとき、次のことが成立する。

定理C （I）ある $0<\alpha,\beta<1$, $\mu>\omega$ に対し g-function 評価式

$$\|g_{\alpha,\mu}(\varphi)\|_p\leqslant C\|\varphi\|_p\quad,\quad\varphi\in L^p(\Sigma)$$

$$\|g^*_{\beta,\mu}(\psi)\|_{p'}\leqslant C^*\|\psi\|_{p'}\quad,\quad\psi\in L^{p'}(\Sigma)$$

が成立するならば、任意の $\nu>\mu$ に対し $H^\infty(S_\nu)$ f.c. が存在する。一方、逆に

（II）$\mu>\omega$ に対し、$H^\infty(S_\mu)$ f.c. が存在すれば、任意の $\nu>\mu$ に対し上の形の g-function 評価式が成立する。

この定理と類似の結果は、もっと弱い形で［2］によって示

されていた。定理Cは Cowling，McIntosh との共同研究により得られたものである。（I）の証明は、Hilbert 空間の場合と類似の議論による。（II）の証明のポイントは、L^p 空間は次のような"Randamusation"と呼ばれる性質を持っていることである。

補題 T_n，$n=1,2,3,\cdots$，を $L^p(\Sigma)$ に作用する有界作用素の列とする。任意の $a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)\in l^\infty$ に対し

$$\|\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n \varphi\}(x)\|_p \leq C\|a\|_{l^\infty}\|\varphi\|_p \quad ,\varphi\in L^p(\Sigma)$$

ならば、

$$\|\{\sum_{n=1}^{\infty}|(T_n\varphi)(x)|^2\}^{1/2}\|_p \leq C\|\varphi\|_p \quad ,\varphi\in L^p(\Sigma)$$

が成り立つ。

参考文献

[1]A.Yagi: Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, C. R. Acad. Sc. Paris (Ser. I) 299 (1984), 173-176.

[2]M.Cowling: Square functions in Banach spaces, Proc. Centre Math. Anal. Australian National Univ. 9 (1985), 177-184.

[3]A.McIntosh: Operators which have an H_∞ functional calculus, Proc. Centre Math. Anal. Australian National Univ. 14 (1986), 210-231.